Estimation - Estimation Ponctuelle

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2024-2025

Définitions

Estimation ponctuelle

Estimation scalaire à partir des réalisations des X_n :
$\widehat{\theta} = f(x_1, ..., x_N)$

Estimateur associé

Estimateur associé : la v.a.
$\widehat{\Theta} = f(X_1, ..., X_N)$

Estimateur convergent / consistant

Estimateur convergent : proche de θ^* (convergence en proba)
i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\widehat{\Theta} - \theta^*\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Biais, variance et EQM

Biais

$$\boxed{b_{\widehat{\Theta}} = \mathbb{E}(\widehat{\Theta}) - \theta^*}$$

Variance (précision)

$$\boxed{\sigma^2_{\widehat{\Theta}} = \mathrm{Var}\left[\widehat{\Theta}\right] = \mathbb{E}\left[\left|\widehat{\Theta} - \mathbb{E}\left[\widehat{\Theta}\right]\right|^2\right]}$$

MSE / EQM

$$\boxed{\mathrm{eqm}_{\widehat{\Theta}} = \mathbb{E}\left[\left|\widehat{\Theta} - \theta^*\right|^2\right] = \sigma^2_{\widehat{\Theta}} + b^2_{\widehat{\Theta}}}$$

Estimateur biaisé

Estimateur biaisé ou non

$$\begin{cases} N \text{ fini} \\ b_{\widehat{\Theta}} = 0 \end{cases} \iff \widehat{\Theta} \text{ non biaisé}$$

Comportement asymptotique

$$\lim_{N \to \infty} b_{\widehat{\Theta}} = 0 \iff$$
$\widehat{\Theta}$ asymptotiquement non biaisé

Estimateur convergent/consistant

$$\begin{cases} \lim\limits_{N \to \infty} b_{\widehat{\Theta}} = 0 \\ \lim\limits_{N \to \infty} \sigma^2_{\widehat{\Theta}} = 0 \end{cases} \implies \widehat{\Theta} \text{ convergent}$$

Estimateur efficace

$$\boxed{\widehat{\Theta}_1 \text{ plus efficace que } \widehat{\Theta}_2 \iff \mathrm{Var}\big[\widehat{\Theta}_1\big] < \mathrm{Var}\big[\widehat{\Theta}_2\big]}$$

Estimateur asymptotiquement efficace et normal

BANE : Best Asymptotically Normal Estimator

Un estimateur $\widehat{\Theta}$ de θ^* est dit BANE si :

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{L}\big(\widehat{\Theta} - \theta^*\big) = \mathcal{N}\big(0, \mathbf{I}(\theta)^{-1}\big)$$

<u>Si</u> $\widehat{\Theta}$ est obtenu par un $N-$ échantillon $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_N), \widehat{\Theta} = f(\mathbf{X})$

On note $\mathcal{L}\Big(\sqrt{N}\big(f(\mathbf{X}) - \theta^*\big)\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathcal{N}\big(0, \mathbf{M}(\theta)^{-1}\big)$

Bornes de Cramer-Rao

Définition

Si $\widehat{\Theta}$ est un estimateur sans biais de θ^* telle que $\forall\theta, \mathbb{E}\left[\dfrac{\partial \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial\theta}\right] = 0$,

alors : $\mathrm{Var}\big[\widehat{\Theta}\big] \geq \dfrac{1}{I(\theta^*)}$ où $I(\theta^*) = -\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{\partial\theta^2}\right]$

Cas scalaire

MVUE : Minimum Variance Unbiased Estimator

Si $\mathrm{Var}\big[\widehat{\Theta}\big] = \{\text{Borne de Cramer-Rao}\}$,
alors $\widehat{\Theta}$ est un MVUE
et on ne peut pas faire mieux